

MATEMATYKA

dla kierunków ekonomicznych

Przykłady i zadania wraz z repetytorium ze szkoły średniej

Henryk Gurgul, Marcin Suder

wydanie VI uzupełnione i poprawione
uwzględniające podstawowy program matematyki
również na kierunkach technicznych

Spis treści

O autorach	13
Wstęp	15
Przedmowa do wydania szóstego.....	19
1. Repetytorium	21
1.1. Elementy logiki, zbiory i relacje	21
1.1.1. Rachunek zdań	21
1.1.2. Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory	24
1.1.3. Formy zapisu twierdzeń i definicji	27
1.1.4. Zbiory	28
1.1.5. Iloczyn kartezjański zbiorów.....	34
1.1.6. Rodzaje i własności relacji	36
1.2. Działania na liczbach rzeczywistych oraz wyrażeniach algebraicznych	37
1.2.1. Podstawowe działania w zbiorze liczb rzeczywistych.....	37
1.2.2. Pojęcie logarytmu	40
1.2.3. Wartość bezwzględna i cecha	41
1.2.4. Silnia i dwumian Newtona	42
1.2.5. Wzory skróconego mnożenia	43
1.3. Elementy geometrii na płaszczyźnie	44
1.3.1. Wektory w płaszczyźnie \mathbb{R}^2	44
1.3.2. Proste na płaszczyźnie	51
1.3.3. Równania okręgu i elipsy	54
1.4. Funkcja i jej własności	56
1.4.1. Dziedzina, zbiór wartości i wykres funkcji	56
1.4.2. Funkcja odwrotna	59
1.4.3. Złożenie funkcji	63
1.4.4. Parzystość i nieparzystość funkcji.....	63
1.4.5. Okresowość funkcji	66

1.4.6. Monotoniczność funkcji. Ekstrema lokalne funkcji	67
1.4.7. Wypukłość i wklęsłość funkcji. Punkty przegięcia	73
1.5. Ciąg liczbowy.....	76
1.5.1. Definicja ciągu	76
1.5.2. Monotoniczność ciągu.....	77
1.5.3. Ciąg arytmetyczny i geometryczny	79
1.6. Przegląd funkcji elementarnych	82
1.6.1. Funkcja liniowa	82
1.6.2. Funkcja kwadratowa	93
1.6.3. Funkcja wielomianowa.....	99
1.6.4. Funkcja wymierna.....	106
1.6.5. Funkcja potęgowa.....	115
1.6.6. Funkcja wykładnicza	119
1.6.7. Funkcja logarytmiczna.....	121
1.6.8. Funkcje trygonometryczne	123
1.6.9. Funkcje cyklometryczne	129
1.6.10. Funkcje elementarne. Sklejenie funkcji	133
2. Elementy algebry liniowej i geometrii analitycznej	135
2.1. Definicja i rodzaje macierzy	135
2.2. Działania na macierzach	139
2.3. Wyznacznik macierzy	148
2.3.1. Obliczanie wyznaczników macierzy wyższych stopni	152
2.3.2. Własności wyznacznika	156
2.4. Rząd macierzy	163
2.4.1. Własności rzędu macierzy.....	165
2.5. Macierz odwrotna.....	170
2.5.1. Odwracanie macierzy metodą operacji elementarnych	176
2.5.2. Zastosowanie macierzy odwrotnej do rozwiązywania równań macierzowych	178
2.6. Układy równań liniowych	183
2.6.1. Układy Cramera	183
2.6.2. Twierdzenie Kroneckera-Capellego	189
2.6.3. Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa	196
2.7. Wektory i wartości własne macierzy	202
2.8. Liczby zespolone.....	205
2.8.1. Podstawowe własności liczb zespolonych	205
2.8.2. Interpretacja geometryczna.....	211
2.8.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej.....	213
2.8.4. Równania wielomianowe w zbiorze liczb zespolonych	221

2.9. Elementy geometrii analitycznej w przestrzeni	225
2.9.1. Wektory w przestrzeni	225
2.9.2. Iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany w \mathbb{R}^3	227
2.9.3. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	234
2.10. Zadania i odpowiedzi	254
3. Zastosowania ekonomiczne teorii macierzy i układów równań	274
3.1. Tablice i modele input-output	279
3.2. Renty gruntowe	284
3.2.1. Renty ekstensywne	284
3.2.2. Renty intensywne	288
3.3. Teoria kosztów komparatywnych – przykład	291
3.4. Zastosowanie wartości własnych i wektorów własnych	293
3.5. Zadania i odpowiedzi	294
4. Granica ciągu liczbowego	300
4.1. Definicja granicy ciągu liczbowego. Ciągi zbieżne	300
4.2. Ciągi rozbieżne	303
4.3. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic	306
4.3.1. Działania na granicach	306
4.3.2. Działania na nieskończonościach	308
4.3.3. Symbole nieoznaczone	309
4.4. Obliczanie granic ciągów	310
4.4.1. Twierdzenie o trzech ciągach	319
4.4.2. Liczba e jako granica ciągu	321
4.5. Zadania i odpowiedzi	325
5. Elementy matematyki finansowej	329
5.1. Oprocentowanie, kapitalizacja	330
5.1.1. Oprocentowanie	330
5.1.2. Kapitalizacja prosta i złożona	331
5.1.3. Kapitalizacja zgodna – oprocentowanie dekursywne i antycypatywne	334
5.1.4. Oprocentowanie w ciągu roku	336
5.1.5. Metoda liczb procentowych	339
5.1.6. Kapitalizacja ciągła	340
5.1.7. Efektywna stopa procentowa	341
5.1.8. Kapitalizacja przy zmiennej stopie procentowej	343
5.1.9. Zasada równoważności	344
5.1.10. Równoważne stopy procentowe i dyskontowe	344
5.1.11. Oprocentowanie mieszane	346
5.2. Spłata długów i kredytów	347
5.2.1. Długi krótkoterminowe	349

5.2.2. Długi średnioterminowe i długoterminowe	350
5.2.3. Spłata długu o danych ratach łącznych, zgodna	351
5.2.4. Ustalenie brakującej raty łącznej	353
5.2.5. Raty kapitałowe o równych wysokościach	356
5.2.6. Spłata jednorazowa	357
5.2.7. Jednorazowa spłata długu przy ratalnej spłacie odsetek	358
5.2.8. Konwersja długów	359
5.3. Renty kapitałowe	360
5.3.1. Renty równoważne	362
5.3.2. Renty tworzące ciągi arytmetyczny i geometryczny	364
5.3.3. Renty kapitałowe z uwzględnieniem inflacji	369
5.4. Metody oceny projektów inwestycyjnych	371
5.4.1. Metoda kapitałowa	371
5.5. Wycena papierów wartościowych	377
5.5.1. Obligacje o stałym oprocentowaniu	377
5.5.2. Akcje	348
5.5.3. Modele dywidendy	379
5.6. Zadania i odpowiedzi	380
6. Granica i ciągłość funkcji. Asymptoty	388
6.1. Granica funkcji w punkcie	388
6.1.1. Definicja Cauchy'ego granicy funkcji	388
6.1.2. Definicja Heinego granicy funkcji	390
6.2. Granice jednostronne	392
6.2.1. Granice jednostronne w sensie Cauchy'ego	392
6.2.2. Granice jednostronne w sensie Heinego	394
6.3. Granica funkcji w ∞ i $-\infty$	395
6.3.1. Granice w ∞ i $-\infty$ w sensie Cauchy'ego	395
6.3.2. Granice w ∞ i $-\infty$ w sensie Heinego	396
6.4. Działania na granicach	397
6.5. Działania na nieskończonościach	400
6.6. Obliczanie granic funkcji	400
6.6.1. Granice funkcji wielomianowych	401
6.6.2. Granice funkcji wymiernych	401
6.6.3. Granice funkcji niewymiernych	404
6.6.4. Granice typu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	406
6.6.5. Granice typu $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	408
6.6.6. Twierdzenie o trzech funkcjach	410
6.7. Asymptoty funkcji	412
6.8. Ciągłość funkcji	419

6.9. Twierdzenia o funkcjach ciągłych	428
6.9.1. Twierdzenie Weierstrassa	428
6.9.2. Własność Darboux.....	429
6.10. Zadania i odpowiedzi	431
7. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej	438
7.1. Pochodna funkcji	438
7.1.1. Iloraz różnicowy.....	438
7.1.2. Pochodna funkcji w punkcie	440
7.1.3. Pochodna jako funkcja	444
7.1.4. Pochodne wyższych rzędów	449
7.2. Twierdzenia dotyczące pochodnych	450
7.2.1. Twierdzenia o wartości średniej w rachunku różniczkowym	451
7.2.2. Różniczka funkcji jednej zmiennej.....	453
7.2.3. Twierdzenie de l'Hospitala	456
7.2.4. Wzór Taylora i Maclaurina	459
7.3. Zastosowanie pochodnej do badania własności funkcji	464
7.3.1. Ekstrema i monotoniczność funkcji.....	464
7.3.2. Punkty przegięcia i przedziały wypukłości.....	474
7.3.3. Badanie przebiegu zmienności funkcji	479
7.4. Zadania i odpowiedzi	492
8. Zastosowania ekonomiczne pochodnej funkcji jednej zmiennej	513
8.1. Interpretacja ekonomiczna pochodnej	513
8.2. Podstawowe funkcje w ekonomii oraz ich pochodne	514
8.2.1. Funkcje kosztu, przychodu i zysku	514
8.2.2. Funkcja produkcji	516
8.2.3. Funkcja popytu i podaży	517
8.2.4. Konsumpcja i oszczędności.....	517
8.2.5. Funkcja użyteczności	518
8.3. Elastyczność funkcji.....	519
8.3.1. Wybrane rodzaje elastyczności.....	519
8.3.2. Formuła Amoroso-Robinsona	521
8.4. Funkcje Törnquista.....	522
8.5. Funkcja trendu	525
8.6. Zadania i odpowiedzi	527
9. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej	537
9.1. Całka nieoznaczona.....	537
9.1.1. Definicja i podstawowe własności całki nieoznaczonej.....	537
9.1.2. Podstawowe metody całkowania	541

9.1.3. Całka z funkcji wymiernej.....	548
9.1.4. Całkowanie wybranych funkcji niewymiernych	555
9.1.5. Całki funkcji trygonometrycznych.....	562
9.2. Całka oznaczona w sensie Riemanna	571
9.2.1. Definicja i podstawowe własności całki oznaczonej.....	571
9.2.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.....	574
9.3. Całka niewłaściwa.....	586
9.3.1. Całka z funkcji nieograniczonej	586
9.3.2. Całka w przedziale nieograniczonym.....	589
9.3.3. Całka niewłaściwa a pole powierzchni.....	591
9.4. Zadania i odpowiedzi	597
10. Przykłady ekonomicznych zastosowań całki oznaczonej	607
10.1. Ekonomiczna interpretacja całki oznaczonej.....	607
10.2. Zadania i odpowiedzi	610
11. Szeregi liczbowe i potęgowe	612
11.1. Szereg liczbowy	612
11.1.1. Definicja i podstawowe własności szeregu liczbowego	612
11.1.2. Badanie zbieżności szeregów z definicji	614
11.1.3. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych	617
11.1.4. Szeregi naprzemienne	627
11.2. Szeregi potęgowe	629
11.2.1. Obszar zbieżności szeregu potęgowego.....	630
11.2.2. Suma szeregu potęgowego.....	633
11.3. Zadania i odpowiedzi	641
12. Funkcje dwóch zmiennych	647
12.1. Podstawowe pojęcia.....	647
12.2. Ciąg i granica ciągu w przestrzeni \mathbb{R}^2	650
12.3. Granica i ciągłość funkcji w przestrzeni \mathbb{R}^2	651
12.4. Rachunek różniczkowy funkcji dwóch zmiennych.....	653
12.4.1. Pojęcia różniczkowalności i pochodnych cząstkowych.....	654
12.4.2. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	656
12.4.3. Gradient i pochodna kierunkowa	658
12.4.4. Różniczka funkcji dwóch zmiennych	659
12.5. Ekstrema funkcji dwóch zmiennych	661
12.5.1. Ekstrema lokalne	661
12.5.2. Ekstrema warunkowe	668
12.5.3. Ekstrema globalne funkcji dwóch zmiennych.....	672

12.6. Funkcje uwikłane jednej zmiennej	679
12.6.1. Definicja funkcji uwikłanej	679
12.6.2. Ekstrema funkcji uwikłanych.....	680
12.7. Całka podwójna	683
12.7.1. Definicja i własności całki podwójnej	683
12.7.2. Całka iterowana	685
12.7.3. Zamiana zmiennych w całce podwójnej	693
12.7.4. Zastosowanie całki podwójnej	699
12.8. Zadania i odpowiedzi	706
13. Zastosowania ekonomiczne funkcji wielu zmiennych	718
13.1. Relacja preferencji konsumenta	718
13.2. Funkcja użyteczności	722
13.2.1. Prawo Gossena dla koszyka dóbr.....	722
13.3. Funkcja popytu konsumenta.....	725
13.4. Funkcje produkcji	727
13.5. Metoda najmniejszych kwadratów	732
13.6. Zadania i odpowiedzi	735
14. Równania różniczkowe i różnicowe	738
14.1. Równania różniczkowe zwyczajne	738
14.1.1. Definicja i podstawowe pojęcia	738
14.1.2. Wybrane typy równań pierwszego rzędu	740
14.1.3. Równanie różniczkowe Bernoulliego	752
14.1.4. Równania różniczkowe liniowe rzędu II o stałych współczynnikach	754
14.2. Równania różnicowe	761
14.2.1. Pojęcie równania różnicowego	761
14.2.2. Równania różnicowe liniowe o stałych współczynnikach.....	763
14.2.3. Równania różnicowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach ..	764
14.3. Zadania i odpowiedzi	767
15. Zastosowanie równań różniczkowych i różnicowych w ekonomii.....	773
15.1. Matematyczny model wzrostu Domara–Harroda	773
15.2. Model oczekiwań inflacyjnych	774
15.3. Ciągły dynamiczny model input-output.....	774
15.4. Model pajęczyny	775
Bibliografia	779